Warnhinweis

Bei diesen „Lösungen" handelt es sich um Lösungsskizzen, Ansätze und Endergebnisse. Die „Lösungen" können nicht als Muster für Klausur-Lösungen angesehen werden. Außerdem wurden die „Lösungen" nicht noch einmal auf ihre Richtigkeit kontrolliert und können Fehler enthalten.

Diese „Lösungen" dienen lediglich zum Abgleich eurer Ergebnisse. Wenn ihr unsicher seid, fragt lieber noch einmal nach.

Mathenacht Lösung Integration und Taylor

Integration

- Begriffe & Zusammenhänge

① Wahr - Falsch Aufgabe

Für Zerlegungen Z_1, Z_2, eines Intervalls $[a,b]$, gelte $Z_1 \subseteq Z_2$.
Dann gilt für die Ober- und Untersummen $U(Z_1, f) \leq O(Z_2, f)$. ✓

Z sei eine Zerlegung von $[a,b]$.
Eine Funktion heißt genau dann riemann-integrierbar, wenn $\inf_Z \{U(Z,f)\}$ und $\sup_Z \{O(Z,f)\}$ übereinstimmen. f inf & sup sind vertauscht

Alle stetigen Fkt. auf einem Intervall $[a,b]$ $_{a,b \in \mathbb{R}}$ sind dort riemann-integrierbar. ✓

$f: [0, 100] \to \mathbb{R}$ sei riemann-integrierbar. Dann ist auch $f^*: [0,100] \to \mathbb{R}$, $f^*(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{N} \\ f(x), & \text{sonst} \end{cases}$ riemann-integrierbar und es gilt $\int_0^{100} f(x)\,dx = \int_0^{100} f^*(x)\,dx$. ✓ Es gibt nur endlich viele $x \in [0,100]$ mit $f(x) \neq f^*(x)$.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Dann ist f dort integrierbar. f f muss zusätzlich monoton sein

Das Integral ist linear. ✓

Für stetige Funktionen ist $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \int_a^b |f(x)|\,dx$. f Gegenbsp. $f(x) = \sin(x)$ $x \in [0, 2\pi]$

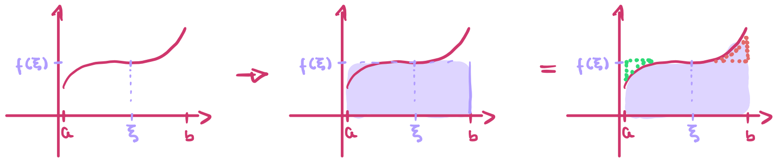
Ist f auf $[a,b]$ unstetig, so gilt dies auch für die zugehörige Integralfkt. f Die Integralfkt. ist immer stetig.

Die Stammfkt. einer stetigen Fkt. ist eindeutig. f nur bis auf die Integrationskonstante

Bei einem uneigentlichen Integral ist die obere Intervallgrenze ∞ oder die untere Intervallgrenze $-\infty$. f Gegenbsp. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x)\,dx$ ist auch ein uneigentliches Int.

② Erkläre den Mittelwertsatz anschaulich mit Hilfe einer Skizze.

Man findet für stetige Funktionen f auf einem kompakten Intervall $[a,b]$ ein $\xi \in [a,b]$, sodass der Flächeninhalt des Rechtecks $f(\xi) \cdot (b-a)$ mit dem Flächeninhalt unter dem Funktionsgraphen $\int_a^b f(x)\,dx$ übereinstimmt.



Fläche: $(b-a)\cdot f(\xi)$

Fläche: $\int_a^b f(x)\,dx$

Da und den gleichen Flächeninhalt haben, kann man „abschneiden" und bei „einsetzen", dann erhält man als Fläche ein Quadrat, dessen Flächeninhalt leicht zu berechnen ist.

③ Integrationsmethoden

1) $\int_0^{\frac12}(3x^2+4x+5)\cdot\sin(\pi x)\,dx = \int_0^{\frac12}3x^2\sin(\pi x)\,dx + \int_0^{\frac12}4x\sin(\pi x)\,dx + \int_0^{\frac12}5\sin(\pi x)\,dx$

partielle Int.:

$= \left[-\frac{3x^2}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^{\frac12} + \int_0^{\frac12}\frac{6x}{\pi}\cos(\pi x)\,dx + \left[-\frac{4x}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^{\frac12} + \int_0^{\frac12}\frac{4}{\pi}\cos(\pi x)\,dx + \int_0^{\frac12}5\sin(\pi x)\,dx$

partielle Int.:

$= 0+0+\left[\frac{6x}{\pi^2}\sin(\pi x)\right]_0^{\frac12} - \int_0^{\frac12}\frac{6}{\pi^2}\sin(\pi x)\,dx + 0+0+\left[\frac{4}{\pi^2}\sin(\pi x)\right]_0^{\frac12} - \left[\frac{5}{\pi}\cos(\pi x)\right]_0^{\frac12}$

$= \frac{3}{\pi^2} + \left[\frac{6}{\pi^3}\cos(\pi x)\right]_0^{\frac12} + \frac{4}{\pi^2} - \frac{5}{\pi} = \frac{6}{\pi^3}+\frac{7}{\pi^2}-\frac{5}{\pi}$

2) $\int\frac{1}{x^2+2x+2}\,dx \overset{\text{quadratische Ergänzung}}{=} \int\frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \underset{\text{Substitution } x+1=t}{=} \int\frac{1}{t^2+1}\,dt = \arctan(t)+c \overset{\text{Resubstitution}}{=} \arctan(x+1)+c$

3) $\int_0^a x\cos(x^2+1)\,dx \underset{\text{Substitution } t=x^2+1}{=} \frac12\int_1^{a^2+1}\cos(t)\,dt = \frac12\sin\left((a^2+1)-\sin(1)\right)$

4) $\int\frac{x^2}{x^2-2x+1}\,dx \underset{\text{Polynomdivision}}{=} \int 1+\frac{2x-1}{(x-1)^2}\,dx \overset{*}{=} \int 1+\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}\,dx$

$x_0=1$ ist doppelte Nullstelle von $(x-1)^2$

$*\quad \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}$

$\Leftrightarrow\quad 2x-1 = A_1(x-1)+A_2$

$\Leftrightarrow\quad 2x-1 = A_1x - A_1 + A_2$

Koeffizientenvergleich

$\Rightarrow\quad A_1=2,\quad A_1+A_2=1$

$\Rightarrow\quad A_2=-1$

$\overset{*}{=}\int 1+\frac{2}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\,dx = x+2\ln(x-1)-\frac{1}{(x-1)}$

④ Berechne die Ableitung der Funktion $f(x)$, $f(x)=\int_0^{e^{x+1}}\sqrt{1+t^2}\,dt$.

Kettenregel: $f(x)=g(h(x))$, $g(t)=\int_0^t\sqrt{1+s^2}\,ds$, $h(x)=e^{x+1}$

$f'(x)=\sqrt{1+(e^{x+1})^2}\cdot e^{x+1}$

⑤ Taylor

a) Berechne das Taylorpolynom 2. Grades von $f(x) = (x+1)e^{2x}$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

$$f(x) = (x+1)e^{2x} \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^{2x} + 2(x+1)e^{2x} = e^{2x}(2x+3) \qquad f'(0) = 3$$
$$f''(x) = 2e^{2x} + 2(2x+3)e^{2x} \qquad f''(0) = 8$$

$$\Rightarrow T_2(x) = 1 + 3(x-0) + \frac{8}{2}(x-0)^2 = 1 + 3x + 4x^2$$

b) Ermittle mit Hilfe des Taylorpolynoms einen Näherungswert für $f(0{,}5)$.

$$T_2(0{,}5) = 1 + 1{,}5 + 4 \cdot 0{,}25 = 3{,}5$$

c) Die Genauigkeit der Annäherung mittels Taylorpolynom nimmt ab, je weiter der Wert vom Entwicklungspunkt entfernt ist. Der Restterm wird sehr groß:

$$f(200) = 201e^{402} \approx 7{,}75 \cdot 10^{176}$$
$$T_2(200) = 1 + 600 + 4 \cdot 40\,000 = 160\,601$$

Mathenacht 2023 Lösungen

Dienstag, 4. Juli 2023 14:46

1. Aufgabe:

Welche der Aussagen sind wahr und welche Falsch? Begründe!

- ☒ Der Durchschnitt einer offenen Menge mit einer abgeschlossenen Menge ist weder offen noch abgeschlossen.
- ☑ Jede ein-elementige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist folgenkompakt.
- ☑ Jede konvergente Folge im metrischen Raum ist eine Cauchy-Folge.
- ☒ Sei $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ p(x,y) = x^4 + 2y^2$. Entweder ist die Menge $M_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ p(x,y) > 0\} offen$ oder $M_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ p(x,y) + 1 > 0\}$ ist abgeschlossen.
- ☑ Die Vereinigung zweier nicht leerer abgeschlossenen Kugeln im $\mathbb{R}^n$ ist kompakt.

- Sei $A := \overline{B_2(0)}$ und $M := B_1(0)$. Dann ist A abg. und M offen, aber $A \cap M = M$ offen

  da $M \subset A$

- Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ mit $|M| = 1$ und $(x_n) \subset M$ eine Folge. Dann ist (x_n) konst.

  $\Rightarrow (x_n)$ konv. $\Rightarrow (x_n)$ besitzt konv. TF $\Rightarrow M$ folgenkpkt.

- Sei $(x_n) \subset X$ konv., d.h. $\exists x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq N$. Dann gilt für $\varepsilon > 0$:

  $$\|x_n - x_m\| = \|x_n - x + x - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für } n, m \geq N$$

  $\Rightarrow (x_n)$ ist CF

- Es gilt $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 < p(x,y) = x^4 + 2y^2\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Rightarrow M_1^c = \{(0,0)\}$ abg.

  $\Rightarrow M_1$ offen

  Aber auch $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 < 0 \leq p(x,y) = x^2 + 2y^2\} = \mathbb{R}^2 \Rightarrow M_2$ abg.

  Da wir eine „Entweder oder"-Aussage haben und beide Aussagen

  wahr sind, ist die ges. Aussage falsch.

• Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, r_1, r_2 \geq 0$ und $d := \|x_1 - x_2\|$. Dann ist

$$\overline{B_{r_1}(x_1)} \cup \overline{B_{r_2}(x_2)} \subset \overline{B_{r_1+r_2+d}(x_1)} \quad \text{und} \quad \underbrace{\overline{B_{r_1}(x_1)}}_{=:M_1} \cup \underbrace{\overline{B_{r_2}(x_2)}}_{=:M_2} \text{ abg., da}$$

$$M_1 \cup M_2 \overset{M_1, M_2 \text{ abg.}}{=} (M_1 \cup \partial M_1) \cup (M_2 \cup \partial M_2) = (M_1 \cup M_2) \cup (\partial M_1 \cup \partial M_2) \overset{\text{Def. Rand}}{=} (M_1 \cup M_2) \cup \partial (M_1 \cup M_2)$$

~~3.~~ 2. Aufgabe:

Überprüfe ob für beliebige $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) := \frac{n}{2}|x-y|$ eine Norm ist.

Für $(1,1) \in \mathbb{R}^2$ gilt: $(1,1) \neq (0,0)$, aber

$$f((1,1)) = \frac{n}{2}|1-1| = 0$$

Damit ist f keine Norm

3. Aufgabe:

Gegeben ist die Menge:

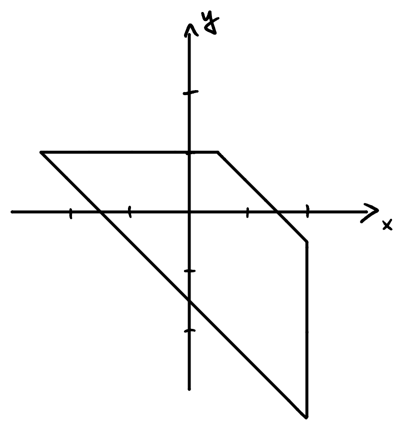
$$M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \leq 2,\ y \leq 1 \text{ und } |x+y| \leq \frac{3}{2}\}$$

1. Skizziere die Menge.
2. Untersuche ob M abgeschlossen, offen oder beschränkt ist.
3. Was ändert sich wenn wir:

   a) $M \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ (x - \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 < 1\}$,
   b) $M \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = \sin y\}$,
   c) $M \cup \mathbb{R}^2$ oder
   d) $M \times \mathbb{R}$

   betrachten?

1.



2. M ist abgeschlossen und beschr.

3. a) beschränkt, aber nicht offen oder abg.

b) abg. ✓, beschr. X , offen X

c) abg. ✓, beschr. X , offen ✓

d) abg. ✓, beschr. X , offen X

4. Aufgabe:

Welche der beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \cos(2\pi(x+y)) \quad g(x,y) := \sin\left(\frac{2\pi}{|x|+|y|}\right)$$

besitzt in $(0,0)$ einen Grenzwert? Begründe!

Sei $(x_n, y_n) \subset \mathbb{R}^2$ mit $(x_n, y_n) \xrightarrow{(n\to\infty)} 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \cos(2\pi(x_n+y_n)) \overset{\substack{\cos \\ \text{stetig}}}{=} \cos(\lim_{n\to\infty} 2\pi(x_n+y_n)) = \cos 2\pi = 1$$

$\Rightarrow f$ besitzt GW in $(0,0)$

Sei $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ mit $x_n := y_n := \frac{1}{n}$. Dann gilt $(x_n,y_n) \to 0 \ (n\to\infty)$

$$g(x_{4n+1}, y_{4n+1}) = \sin\left(\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{4n+1}\right| + \left|\frac{1}{4n+1}\right|}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\left(\frac{2}{4n+1}\right)}\right) = \sin((4n+1)\pi) = 1 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$g(x_{2n}, y_{2n}) = \sin\left(\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2n}\right| + \left|\frac{1}{2n}\right|}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{\left|\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}n}\right|}\right) = \sin(2\pi n) = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} g(x_{4n+1}, y_{4n+1}) = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} g(x_{2n}, y_{2n})$, d.h. für eine Nullfolge sind die GW von g verschieden

$\Rightarrow g$ hat keinen GW in $(0,0)$

5. Aufgabe:

In welchen Punkten ist die folgende Funktion stetig?

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Offensichtlich für alle $(x,y) \neq (0,0)$.

Offensichtlich für alle $(x,y) \neq (0,0)$.

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{xy^3}{x^2+y^2} \leq \frac{xy^3}{y^2} = xy \to 0 \text{ für } (x,y) \to 0$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2} \to 0 \text{ für } (x,y) \to 0 \Rightarrow f \text{ stetig in } (0,0)$$

$\Rightarrow f$ stetig auf $\mathbb{R}^2$

6. Aufgabe:

Gegeben ist die Menge $Y := \{\frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$. Bestimme $\mathring{Y}, \overline{Y}, \partial Y$.

$\partial Y = Y \cup \{0\}$, da jede Umgebung um bel. Ele. in Y jeweils Ele. in Y selbst und im Komplement Y^c enthalten

$\mathring{Y} = \emptyset$ analoge Begründung

$\overline{Y} = \partial Y \cup Y = \{0\} \cup Y$

7. Aufgabe: (*Zusatz*)

Beweise folgende Aussagen:

1. Jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist stetig.
2. **Nur für BA** Seien $M_1, M_2 \subseteq X$ für einen metrischen Raum (X, d) kompakt. Dann ist

$$M_1 \cdot M_2 := \{a \cdot b \mid a \in M_1, b \in M_2\}$$

   kompakt.
3. Für jedes $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt folgende Gleichung:

$$||x+y||_2^2 + ||x-y||_2^2 = 2\left(||x||_2^2 + ||y||_2^2\right)$$

   (Diese Gleichung wird auch Parallelogrammgleichung genannt, aber warum?)

1.) Sei $f := \|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm und $x \in \mathbb{R}^n, (x_n) \subset \mathbb{R}^n$ mit $x_n \to x$ in $\mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(x)| = |\, \|x_n\| - \|x\| \,| \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

2.) Sei $(z_n) \subset M_1 M_2$, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists x_n \in M_1, y_n \in M_2 : x_n y_n = z_n$

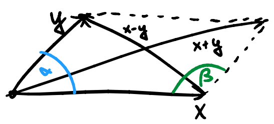
M_1, M_2 kpkt $\Rightarrow x_n, y_n$ besitzen konv. TF, d.h. $\exists x \in M_1, y \in M_2 : x_{n_k} \xrightarrow{(k\to\infty)} x\ ,\ y_{n_k} \xrightarrow{(k\to\infty)} y$ in X

$\Rightarrow z_{n_k} = x_{n_k} y_{n_k} \to xy =: z \Rightarrow M_1 M_2$ folgenkpkt $\overset{X = \mathbb{R}^d}{\Rightarrow} M_1 M_2$ kpkt.

3) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x+y\|_2^2 + \|x-y\|_2^2 = \langle x+y, x+y\rangle_2 + \langle x-y, x-y\rangle_2 \overset{\text{SP Eigenschaft}}{=} \langle x,x\rangle + \cancel{\langle x,y\rangle} + \cancel{\langle y,x\rangle} + \langle y,y\rangle$$
$$+ \langle x,x\rangle + \cancel{\langle x,-y\rangle} + \cancel{\langle -y,x\rangle} + \langle -y,-y\rangle$$
$$= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Anschaulich:



Mit dem Kosinussatz im Dreieck gilt:

$$|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos(\alpha)$$
$$|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos(\beta)$$

Beziehung von α und β: $\beta = \pi - \alpha \Rightarrow \cos\beta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$

$$\Rightarrow |x+y|^2 + |x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos(\alpha) + |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\cos(\beta)$$

$$= 2|x|^2 + 2|y|^2 - 2|x||y|\cos(\alpha) + 2|x||y|\cos(\alpha) = 2(|x|^2 + |y|^2)$$

Differenzierbarkeit

Mathe

Nacht

1. Aufgabe:

Gegeben seien $\alpha > 0$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = |xyz|^\alpha.$$

Untersuchen Sie, ob f im Nullpunkt

a) stetig,

b) partiell differenzierbar,

c) total differenzierbar ist.

Lsg:

a) f ist als Verknüpfung stetiger Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^3$ stetig, denn $f = h \circ g$ mit $g : (x, y, z) \mapsto xyz$ und $h : x \mapsto |x|^\alpha$. Dabei ist h stetig nach Analysis I und g ist auf ganz $\mathbb{R}^3$ differenzierbar, damit nach Mittelwertsatz Lipschitzstetig, damit stetig. (man kann auch $f(x, y, z) = |x|^\alpha |y|^\alpha |z|^\alpha$ schreiben)

b) Es ist partiell differenzierbar in der 0 für alle $\alpha > 0$. Betrachte den Differentialquotienten

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(0 + t, 0, 0) - f(0, 0, 0)}{t} = 0$$

c) Nur für $\alpha > 1$ ist es total diffbar, weil sonst partielle Ableitungen nicht stetig sind. partielle Ableitung z.B. für x ist

$$\alpha x |x|^{\alpha - 2} |yz|^\alpha$$

.

2. Aufgabe:

a) Bestimmen Sie alle stetig differenzierbaren Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die der Gleichung $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ in allen Punkten des $\mathbb{R}^2$ genügen.

b) Für welche Richtungen $\nu \in \mathbb{R}^2$, $||\nu|| = 1$, wird die Richtungsableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu}(0, 0)$ maximal bzw. minimal?

Hinweis zu a): Mittels Kettenregel forme man die Gleichung um in eine (einfachere) Gleichung für die Funktion $v(\xi, \eta) := u(x, y)$, die durch die Variablentransformation

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y$$

definiert ist.
Lsg.:

a) Sei $u(x,y) = v(\phi(x,y))$ mit $\phi(x,y) = (x+y, x-y) = (\xi, \eta)$. Dann ist $\nabla u(x,y) = \nabla v(\xi,\eta) \cdot D\phi(x,y)$ mit

$$D\phi(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

.Es Ist

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) &= \partial_\xi v(\xi,\eta) + \partial_\eta v(\xi,\eta) \\ \partial_y u(x,y) &= \partial_{xi} v(\xi,\eta) - \partial_\eta v(\xi,\eta) \end{aligned}$$

Also gilt $\partial_\eta v = 0$, damit ist $u(x,y) = v(x+y)$.

b) Es ist

$$\begin{aligned} \partial_{nu} u(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{u(t\nu_1, t\nu_2) - u(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{v(t(\nu_1+\nu_2)) - v(0)}{t} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{v(s) - v(0)}{s}(\nu_1+\nu_2) \\ &= v'(0)(\nu_1+\nu_2) \end{aligned}$$

Wird maximal bzw minimal wenn $||\nu|| = 1$ und $\nu_1 + \nu_2 \to max$ bzw. $\nu_1 + \nu_2 \to min$.

3. Aufgabe:

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Geben Sie eine Darstellung für die Tangentialebene an die Fläche $\{(x, y, f(x,y))$ für $x, y \in \mathbb{R}\}$ im Punkt $(1,1)$ an.

b) Berechnen Sie f_{xy} und f_{yx} im Nullpunkt. Ist f_{xy} stetig im Nullpunkt?

c) Geben Sie die Richtungsableitungen von f im Punkt $(2,3)$ an.

d) Auf welchen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ ist f total differenzierbar? (mit Begründung)

Lsg.:

a) Die Tangentialebene ist gegeben als

$$\begin{aligned} z &= f(1,1) + (x-1)f_x(1,1) + (y-1)f_y(1,1) \text{ mit} \\ \frac{\partial}{\partial x} f &= \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} f &= \frac{xy^4 + 3x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} \text{ also} \\ z &= 0.5 + \frac{0}{4}(x-1) + \frac{4}{4}(y-1) \\ &= 0.5 + y - 1 \\ &= -0.5 + y \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{y^6 + 6x^2y^4 - 3x^4y^2}{(x^2+y^2)^3}.$$

Die Funktion f_{xy} ist nicht stetig im Nullpunkt, da

$$\lim_{n\to\infty} f_{xy}(1/n, 0) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f_{xy}(0, 1/n)$$

Mit Differentialquotient kommt man auf $f_x(0,0) = 0$ bzw. $f_y(0,0) = 0$. Nun berechne mit Differentialquotient eine weitere Ableitung

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \\ f_{xy}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f_x((0,t)) - f_x(0,0)}{t} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Für f_{yx} analog.

c) Die Richtungsableitung ist gegeben als $(2\ 3) \cdot \nabla f(x,y)$.

d) AuSSerhalb des Nullpunktes ist f total differenzieber. Die partiellen Ableitungen sind stetig in der 0 da $f_x(0,0) \leq |xy|$ wenn $|xy| \to 0$ dann auch $f_x(0,0) \to 0$. f_y analog. Deswegen total differenzierbar.

4. Aufgabe:

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k} ||x - a_i||^2$$

mit der euklidischen Norm $||\cdot||$. Zeigen Sie, dass f ein eindeutig bestimmtes globales Minimum besitzt, und berechnen Sie es.
Lsg.:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{k} ||x - a_i||^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum j = 1^n (x_j - a_{ij})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{k} \sum j = 1^n (x_j^2 - 2a_{ij}x_j + a_{ij}^2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x) &= \left(\sum_{i=1}^{k} 2x_j - 2a_{ij} \right)_{j=1,\ldots,n} \\ &= \left(k2x_j - \sum_{i=1}^{k} 2a_{ij} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = 0 \implies x_j = k^{-1} \sum_{i=1}^{k} a_{ij}$$

In dem kritischen Punkt hat die Funktion lokales Minimum, denn die Hessematrix ist

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} 2k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2k \end{bmatrix}$$

und damit positiv definit, damit hat die Funktion dort ein lokales Minimum. Es ist sogar ein globales, da $\lim_{||x|| \to \infty} f(x) = \infty$ ist.

5. Aufgabe:

Bestimmen Sie für die Funktionen

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_2 x_3^{-1} \end{pmatrix}$$

,

$$g : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 + y_2 \\ \sin(y_1) \\ \ln(y_2) \end{pmatrix}$$

und h der Verknüpfung dieser beiden Funktionen, die Jacobi-Matrizen $f'(x)$, $g'(y)$ und $h'(x)$ sowie $h'(\frac{\pi}{e}, e, 1)$.
Lsg.:

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} x_2 & 0 \\ x_1 & 1/x_3 \\ 0 & -x_2/x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$J_g(y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cos(y_1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/y_2 \end{bmatrix}$$

$$J_h(x) = \begin{bmatrix} 0 & x_2 + 1/x_3 & x_2 \cos(x_1 x_2) & 1/x_1 \\ 0 & x_1 & x_1 \cos(x_1 x_2) & 0 \\ 0 & -x_1/x_3^2 & 0 & -1/x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$J_h(\pi/e, e, 1) = \begin{bmatrix} 0 & e+1 & -e & e/\pi \\ 0 & \pi/e & -\pi/e & 0 \\ 0 & -\pi/e & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

6. Aufgabe:

Begründen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 + 2$$

auf der Menge $B = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 2 \right\}$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt, und bestimmen Sie Maximum und Minimum nachvollziehbar.
Lsg.: $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 - 2, 4x_2) = 0 \Leftrightarrow (x_1 x_2) = (1, 0)$, $f(1, 0) = -3$ ist lokales Minimum. Das Maximum wird am Rand angenommen bei $(x, y) = (-1, -\sqrt{3})$, dort hat f den Funktionswert 11. f ist eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge und nimmt deshalb Maximum und Minimum an.

Lösungen 10.07.2023

Auflösbarkeit und Extrema unter Nebenbedingungen

1. a) Jacobi-Matrix:

$$Df = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

$$\det(Df) = 2x \cdot 2y = 4xy$$

- $\Rightarrow \det(Df(1,1)) = 4 \neq 0$

  $\Rightarrow f$ ist an der Stelle $(1,1)$ lokal umkehrbar
- $\Rightarrow \det(Df(0,0)) = 0$

  $\Rightarrow f$ ist an der Stelle $(0,0)$ nicht lokal umkehrbar
- In der Umgebung um $(1,1)$ ist

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \approx f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow u = x^2$, $\sqrt{u} = x$ und $v = y^2$, $\sqrt{v} = y$ } jew. nur eine Lösung, da $x,y > 0$ in Umgebung um $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Umkehrfunktion $g(u,v) = \begin{pmatrix} \sqrt{u} \\ \sqrt{v} \end{pmatrix}$

b) Jacobi-Matrix:

$$Df = \begin{pmatrix} 2v & 2u \\ -2u & 2v \end{pmatrix}$$

$\det(Df) = 4v^2 + 4u^2 = 4(v^2 + u^2) > 0 \quad \forall (u,v) \neq (0,0)$

Damit ist f lokal umkehrbar in jedem Punkt aus $\mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$ und damit injektiv in einer Umgebung um diesen Punkt.

- Injektiv selbst ist f nicht, da z.B. $f(-1,-1) = (2,0) = f(1,1)$

2\. a) Satz über implizite Funktionen liefert

$\frac{\partial F}{\partial y}$ muss ungleich 0 sein

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 + 2 > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ $F(x,y) = 0$ kann man für beliebige y auflösen (und beliebige x).

b) $\frac{\partial F}{\partial x} = 5x^4$

$$y'(x) = -\frac{5x^4}{3y^2+2}$$

3\. a) Betrachte $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 1 \\ x + y + z \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Satz über implizite Funktionen:

- $Df = \begin{pmatrix} 2x & 8y & 18z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $f(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}}) = \begin{pmatrix} \frac{4}{13} + \frac{9}{13} - 1 \\ \frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{1}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} = 0,$

  d.h. $(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}})$ ist Lösung des Gleichungssystems.

- $Df_{(y,z)} = \begin{pmatrix} 8y & 18z \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

  $\det\left(Df_{(y,z)}(0, \frac{1}{\sqrt{13}}, -\frac{1}{\sqrt{13}})\right) = \frac{8}{\sqrt{13}} + \frac{18}{\sqrt{13}} \neq 0$

$\Rightarrow$ lokal nach (y,z) auflösbar

b) $$g'(0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial(y,z)}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0) = -\frac{1}{\sqrt{52}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{18}{\sqrt{13}} \\ -1 & \frac{8}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{9}{13} \\ -\frac{4}{13} \end{pmatrix}$$

2/3

4. Nebenbedingung: $x^2+15y^3=15$

$$\Leftrightarrow x^2+15y^3-15=0$$

$$\Rightarrow L(x,y,\lambda)=x^2y^2-x^2+1+\lambda x^2+15\lambda y^3-15\lambda$$

$$\nabla L(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}2xy^2-2x+2\lambda x\\ 2x^2y+45\lambda y^2\\ x^2+15y^3-15\end{pmatrix}\overset{!}{=}0$$

Lösen des Gleichungssystems liefert kritische Punkte $P_1=(0,1)$

$P_2=(\sqrt{15},0)$

$P_3=(-\sqrt{15},0)$.